VALORES Y VECTORES PROPIOS O AUTOVALORES Y AUTOVECTORES O EIGENVALORES Y EIGENVECTORES O VALORES Y VECTORES CARÁCTERÍSTICOS:

Entonces a continuación vamos a hacer una especie de descripción de lo que leí con la mayor formalidad y corrección posible para evaluar qué tanto de lo que he leído se me ha quedado grabado en la cabeza.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES:

Se habla de valores y vectores propios en referencia a matrices cuadradas.

El problema general de los valores y vectores propios es determinar si para una matriz cuadrada A de orden n existe al menos un vector **V** ≠ **0** perteneciente al espacio vectorial ene-dimensional real tal que la pre-multiplicación del vector **V** por la matriz A sea igual a un múltiplo escalar del vector **V**.

Entonces pasamos a la enunciación formal del concepto de valores y vectores propios:

Sea A una matriz cuadrada de orden n y k un escalar; k es un valor propio de la matriz A si y solo si existe al menos un vector **X**≠**0** de Rn tal que:

A.**x** = k.**x**

Se dice entonces que K es un valor propio de A y que **x** es el vector propio de A correspondiente al valor propio k.

**TEOREMA:**

Sea A una matriz cuadrada de orden n y k un escalar; k es valor propio de la matriz A si y solo si se cumple:

Det(A – kI) = **0**

Esto básicamente quiere decir que la matriz A-KI debe ser singular o bien que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz del sistema es A - kI debe ser compatible indeterminado (no puede ser incompatible ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo).

Lo anterior expuesto se puede demostrar de la siguiente manera:

HIPOTESIS: A es una matriz cuadrada de orden n, k es un valor propio de la matriz A y **x** es el vector propio de A asociado al valor propio k, entonces se cumple lo que sigue:

A.**x** = k**x**

A**x -** k**x**=**0**

A**x** - kI**x**=**0**

(A – KI).**x**=**0**

Esto puede interpretarse como la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Pero **x** por ser vector propio de la matriz A se cumple que **X**≠**0**, es decir que, bajo la interpretación de un sistema de ecuaciones expresado de manera matricial, la solución trivial del mismo no es admitida. Pero se sabe que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene como solución la trivial, pero si es compatible determinado esta es la única. De lo anterior se sigue que el sistema de ecuaciones anterior no puede ser compatible determinado y solo queda que sea compatible indeterminado. Esto es equivalente a decir que la matriz del sistema es singular y que por lo tanto su determinante es cero:

Así se llega a: Det(A – kI) = **0**

**SINTESÍS:**

Entonces, una matriz cuadrada de orden n tendrá valores y vectores propios si y solo si:

Det(A – kI) = **0**

Esta condición expresada se denomina **ecuación característica** de la matriz A.

El desarrollo del determinante es un polinomio de grado n en la variable **K**. El polinomio que resulta del desarrollo de ese determinante se denomina polinomio característico de la matriz A.

Por el **Teorema fundamental del álgebra** se sabe que todo polinomio de grado n en una variable **k** con coeficientes complejos (números complejos en sí, números reales, o números imaginarios puros) tiene exactamente n soluciones complejas considerando las repeticiones. Así, el polinomio característico para una matriz A de orden n tiene n soluciones complejas y por consiguiente la matriz tiene n valores propios complejos contando repeticiones.

Se denomina **espectro** de A al conjunto de todos sus valores propios complejos.

Se denomina **radio espectral** de A al valor propio de A de mayor valor absoluto. Este radio espectral representa un círculo centrado en el origen del plano complejo que contiene a todos los valores propios de A de menor valor absoluto que su radio.

Se denomina **multiplicidad geométrica** de un valor **v** a la cantidad de veces que dicho valor es solución de una ecuación algebraica. Se expresa de la siguiente manera Malg(**v**) = cantidad de veces que **v** es solución de la ecuación algebraica.

Una vez determinadas las soluciones del polinomio característico simplemente hay que reemplazar estos valores en la matriz y resolver para cada uno de ellos el sistema de ecuaciones lineales expresada de manera matricial. Para cada solución del polinomio obtenida, las soluciones del sistema de ecuaciones determinan un espacio vectorial ya que la matriz A determina una transformación lineal (toda matriz de orden mxn determina una transformación lineal de un espacio n dimensional a un espacio m dimensional).

En suma la solución del sistema de ecuaciones lineales para cada valor propio puede interpretarse como el sub-espacio vectorial de vectores que conforman el núcleo de la transformación lineal:

(A-ki).**x**

La solución del sistema de ecuaciones lineales para cada valor propio da como resultado el espacio vectorial conformado por los vectores propios de A correspondientes a cada valor junto con el vector nulo que no es considerado como vector propio de A por definición. Este espacio vectorial se denomina **espacio característico de A respecto de k.**

La dimensión del dicho espacio se denomina **multiplicidad geométrica** del valor propio al que corresponde y se escribe Mgeo (v) = dim (espacio característico)

**Se sabe que la multiplicidad geométrica del valor propio es menor o igual a su multiplicidad algebraica**.

PROPIEDADES:

* El producto de los valores propios de una matriz es igual a su determinante;
* La suma de los valores propios de una matriz es igual a su traza;
* Si una matriz es simétrica a valores propios son reales y a valores propios distintos corresponden vectores propios ortogonales;
* Si una matriz tiene n valores propios distintos, el conjunto de los vectores propios correspondientes es LI, o bien, existe un conjunto de n vectores propios LI.
* Los valores propios de la traspuesta de una matriz son iguales a los valores propios de la matriz.
* Una potencia natural de un valor propio de una matriz es a su vez valor propio de las misma potencia natural de la matriz
* El producto entre el valor propio de una matriz por un escalar distinto de cero es un valor propio del producto por el mismo escalar de la matriz.
* Si una matriz es tiene inversa, el inverso de uno de sus valores propios es valor propio de su matriz inversa. De forma equivalente, una matriz es singular ssi tiene por valor propio el escalar cero.
* Los valores propios de una matriz triangular se encuentran en su diagonal principal.

**DIAGONALIZACIÓN:**

Anteriormente referido a las transformaciones lineales, y más específicamente a los operadores lineales, es decir, aquellas transformaciones lineales cuyos dominios y co-dominios coinciden (uno podría referirse a estos operadores lineales como aplicaciones lineales binarias), se vio que las matrices de transformación asociadas en una misma base son distintas y **semejantes** entre sí dependiendo de la base que se escoja, así se pueden tener infinitas matrices asociadas al operador lineal eligiendo distintos conjuntos de vectores que sean base del espacio vectorial en que el operador lineal está definido.

Al introducir estos conceptos se señaló a manera de conclusión del capítulo la conveniencia de utilizar una matriz asociada al operador lineal que sea **diagonal** ya que de esta manera muchas operaciones se facilitan.

Con el concepto de DIAGONALIZACIÓN esto se resuelve.

Entonces, dada una matriz A cuadrada de orden n, la misma es DIAGONALIZABLE si y solo si existe una matriz diagonal D que sea semejante a A. Por lo tanto debe existir una matriz P cuadrada de orden n tal que la A=P-1D.P;

Entonces se tiene el siguiente **teorema** que expresa el método a utilizar para determinar si una matriz es DIAGONALIZABLE, y en caso de serlo encontrarla:

Sea una matriz A de orden nxn con n vectores propios linealmente independientes, se colocan los mismos como columnas de una matriz P que será por lo tanto cuadrada de orden n e invertible ya que los vectores propios son LI. Entonces se cumple:

D = P-1.A.P;

Esta matriz D es una matriz diagonal que conserva los valores propios de A y que tiene como elementos de su diagonal principal los valores propios de A. Se dice que la matriz P DIAGONALIZA a la matriz A. Hay infinitas matrices P que DIAGONALIZAN a A ya que basta con multiplicar cada vector propio de la matriz por un escalar distinto de cero.

Existe una demostración de este teorema en la guía teórica.

Entonces, del teorema anterior se desprende que para que una matriz es DIAGONALIZABLE si y solo si esta tiene n vectores propios linealmente independientes.

Una condición suficiente para que una matriz tenga n vectores propios linealmente independientes es que la misma posea n valores propios distintos.

Del desarrollo de algunos ejercicios también se deduce que para que una matriz tenga n vectores linealmente independientes, es necesario y suficiente que la multiplicidad geométrica y algebraica de cada valor propio de la matriz sean números iguales.

MATRICES SIMÉTRICAS:

El hecho de que una matriz A cuadrada de orden n sea simétrica es condición necesaria y suficiente para que la misma sea DIAGONALIZABLE, es decir, que también es condición necesaria y suficiente para que la misma tenga n vectores propios linealmente independientes. Pero la DIAGONALIZACIÓN de estas matrices es un tipo de DIAGONALIZACIÓN especial que se denomina DIAGONALIZACIÓN ortogonal. Esto quiere decir que los vectores propios LI que conforman la matriz que DIAGONALIZA a A son ortogonales entre sí. En suma, si estos vectores propios son normalizados, lo que se obtiene es una matriz ortogonal que DIAGONALIZA A. Esto último tiene ciertas ventajas como que la inversa de una matriz ortogonal es su traspuesta y los vectores propios de la matriz ortogonal conforman una base ORTONORMAL de Rn

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL:

Sea A una matriz cuadrada simétrica de orden n (por lo tanto DIAGONALIZABLE), con valores propios λi, con vectores propios correspondientes qi y con qiT los traspuestos de estos vectores propios (realmente los vectores qi son matrices cuadradas de orden n con la única columna un vector propio i de A y qiT la matriz traspuesta a ella) la misma puede expresarse de la siguiente manera:

Que básicamente expresa que la matriz A es una combinación lineal de las proyecciones unidimensionales de sus vectores propios ponderada por sus valores propios.

Estas proyecciones unidimensionales descomponen a todo vector en sus componentes (vectores) en la dirección de cada vector propio de la matriz A, que forman un sistema de ejes ortogonales.

Si dos matrices so semejantes entonces tienen los mismos valores propios (se demuestra).